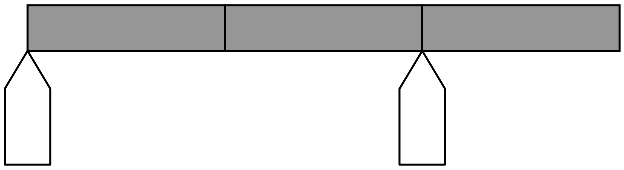
Задачи февральского семинара тренеров ТЮФ-2016
Первая половина

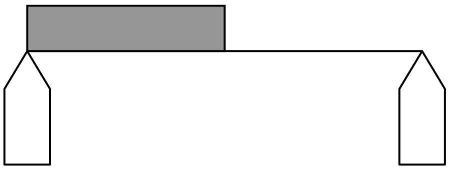
(На семинаре тренеров мы начали сразу с задачи два; а на погружении со школьниками начинали с задачи один, а задачи два ещё не было.)

Задача 1. Два человека поднимают длинный брус. Если они держат его за концы, то на каждого приходится половина веса бруса. А если они располагаются не так симметрично? Например, один держит брус за самый край, а другой — на расстоянии ⅓ длины бруса от другого края?

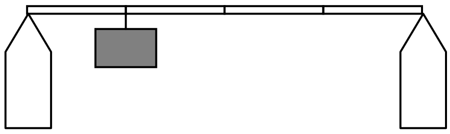


Школьникам предлагается решать эту задачу по группам. Решения обсуждаются на общем заседании. Скорее всего, представленные решения будут разными, в том числе и ошибочными (и Архимед здесь ошибся когда-то!). Нам пригодятся вспомогательные развороты:

Два человека держат длинные «носилки», на которых лежит брус, занимающий половину длины носилок, как показано на рисунке. Как распределяется нагрузка между носильщиками? Верно ли, что на каждого носильщика придётся по ½ веса груза?

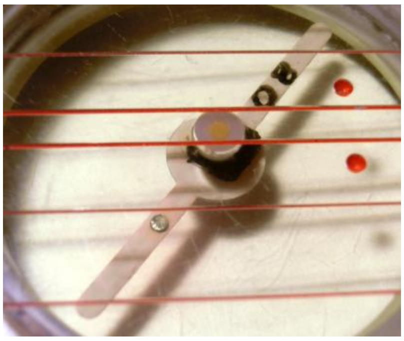


Два человека держат за концы палку, на которой висит чемодан. Как распределяется нагрузка между ними в зависимости от положения чемодана?

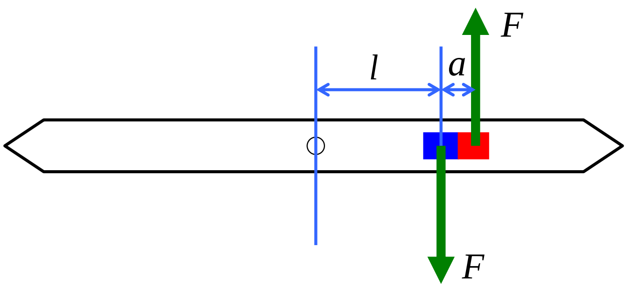


Основная линия обсуждения связана с понятием момента силы. Я держусь за рычаг, второй конец которого находится внутри «чёрного ящика», и где-то на этом втором конце висит груз. Может быть, он давит малым весом на большое плечо, а может быть — большим весом на малое плечо. Я не могу знать, каковы сила и плечо по отдельности, но я могу знать величину создаваемого при этом «момента».

Задача 2. Мы привыкли к тому, что стрелка компаса изготавливается из намагниченного металла. Но стрелка спортивного жидкостного компаса сделана из пластмассы! Как же она поворачивается в направлении «север–юг»? При детальном рассмотрении оказывается, что снизу к стрелке прикреплён небольшой металлический кружок. По видимому, это и есть магнит. В этом можно убедиться, поднеся к компасу железный предмет — стрелка всегда притягивается к нему тем концом, на котором находится кружочек. Спрашивается, как этот магнит разворачивает стрелку, если он прикреплён не на оси, но в стороне от неё?



Чтобы ответить на этот вопрос, нарисуем длинную стрелку с прикреплённым к ней маленьким магнитом; полюса магнита ориентированы вдоль стрелки. Пусть стрелка повёрнута не в направлении «север–юг», а перпендикулярно к нему. Тогда на оба полюса стрелки действуют равные силы, и одна из них направлена на юг, а другая на север. А теперь поймём: хотя эти силы и равные, но их плечи относительно оси вращения стрелки не равны между собой. Обозначим расстояние от оси до ближнего к ней полюса через l, расстояние между полюсами через a. Одна сила приложена к плечу l, и она создаёт момент Fl. Другая сила приложена к плечу $l + a$, и она создаёт момент $F(l + a)$, который крутит стрелку в противоположном направлении. А разность этих моментов равна $F(l + a) - Fl = Fa$. Именно этот момент Fa и разворачивает стрелку.

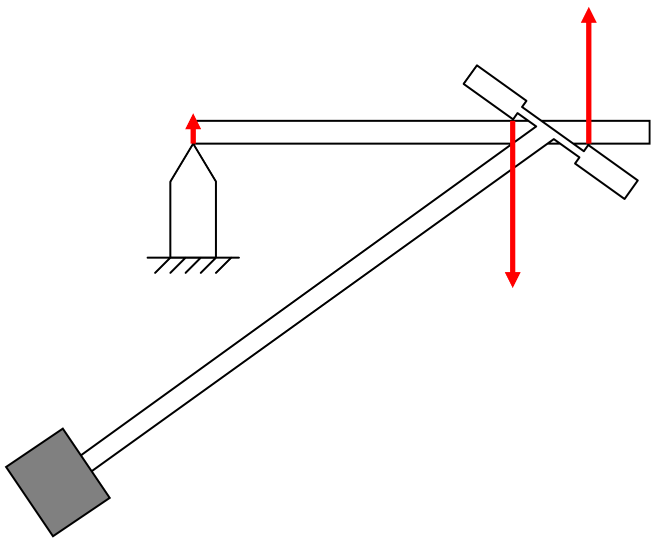


Наш главный вывод заключается в том, что величина вращающего момента не зависит от расстояния между магнитом и осью стрелки. Получается, что магнит можно крепить и на оси стрелки, и на любом расстоянии от неё: его вращающее действие от этого не изменится.

Задача 3. «Вилки на спичке».

Объяснение на языке центров тяжести школьники почти наверняка знают. А если попробовать объяснить этот опыт не на языке центров тяжести, а на языке сил? Спичка поддерживается опорой в одной точке — на её конце. На спичку действует сила тяжести со стороны вилок, направленная вниз. Разве эта сила не должна опрокидывать спичку вниз? Предлагается объяснить этот парадокс.

Чтобы найти правильное объяснение, надо внимательно посмотреть на область крепления вилок. Вилки пытаются переломить спичку, и на спичку со стороны вилок действуют две силы, одна из которых направлена вниз, а другая — вверх! Разность этих двух сил равна весу вилки. Но у этих сил — разные плечи; и их моменты замечательным образом уравновешиваются на рычаге.



Вторая половина

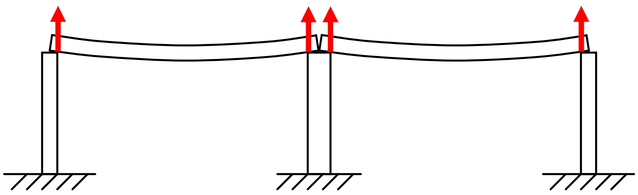
Задача. Длинная однородная балка лежит на трёх опорах: две опоры по краям и одна опора в середине. Как распределится нагрузка между опорами?

1) Попытки написать уравнение моментов ничего не дают: система является статически неопределённой.

2) Почти наверняка будут делаться попытки рассмотреть нашу балку как предельный случай статически определённой системы. Критика: а) такое рассуждение может привести к любому распределению нагрузки; б) малые изменения высоты средней опоры позволяют перенести всю нагрузку только на среднюю опору или только на крайние опоры.

3) А если балка лежит не на трёх опорах, а на трёх пружинах? Очевидно, что все три пружины деформируются одинаково, а по закону Гука это означает, что на каждую пружину приходится по ⅓ веса балки.

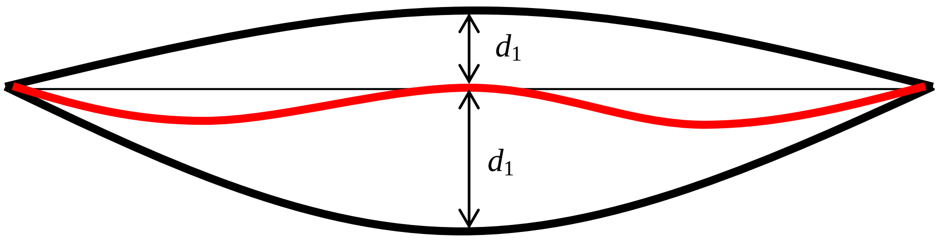
4) Что произойдёт, если балку разломить над средней опорой? Ясно, что на каждую крайнюю опору придётся по ¼ веса балки, а на среднюю опору — ½ веса.



Но верно ли, что у сплошной балки нагрузка распределится так же? Мысленный эксперимент: что произойдёт, если мы попробуем стянуть торцы в месте разлома? Очевидно, что нагрузка на крайние опоры уменьшится, а на центральную — возрастёт. Но как узнать, на сколько именно?

Прогибы и закон Гука

Допустим, что балка висит только на двух крайних опорах. Сейчас на каждую опору приходится ½ веса балки. Подведём под балку центральную опору. Когда опора только что прикоснулась к балке, вес на ней равен нулю. Будем постепенно поднимать опору выше. Когда центральная опора выйдет на один уровень с крайними, вес балки распределиться по опорам искомым образом. Будем поднимать центральную опору ещё выше. При какой-то высоте центральной опоры весь вес балки придётся на неё, а вес на крайних опорах будет равен нулю.



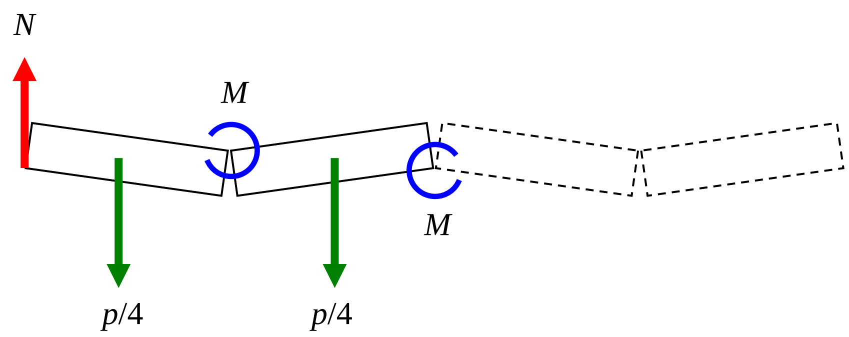
Исходя из закона Гука, нагрузка на центральную опору так относится к нагрузке на две крайние опоры, как прогибов d_1 относится к прогибу d_2.

Но как узнать эти прогибы и их отношение? Здесь мы можем пойти путём экспериментов. Для этого нам нужны длинная гибкая рейка, которая заметно прогибается под собственным весом, и пружинный динамометр, которым мы и саму рейку взвесим, и внешнюю силу измерим. А ещё — струбцина для закрепления консоли и линейка для измерения деформаций. Опыты несложные, но в их постановке есть разные тонкости, что тоже приятно.

Дискретная модель из четырёх звеньев

Заменим балку дискретной моделью из четырёх жёстких звеньев одинаковой длины. Звенья соединены между собой пружинками, подчиняющимися закону Гука. Эта модель с пружинками очень наглядна, и к этому представлению всегда можно вернуться, если описание становится слишком абстрактным.

А ещё на этой модели мы выяснили, что кроме моментов в узлах действуют перерезывающие силы. Но если удобно выбирать части балки, для которых составляются уравнения моментов, то можно обойтись без учёта этих сил.



Все углы между соседними звеньями здесь равны между собой, поэтому будут равными и вращающие моменты во всех сопряжениях.

Составляем уравнение моментов для первого бруска, принимая за ось вращения точку сопряжения первого и второго брусков, и для всей левой половины балки, рассматривая её как одно «замороженное» целое и принимая за ось вращения центральную опору:

$$N \cdot 2a = \frac{P}{4} \cdot a + M$$

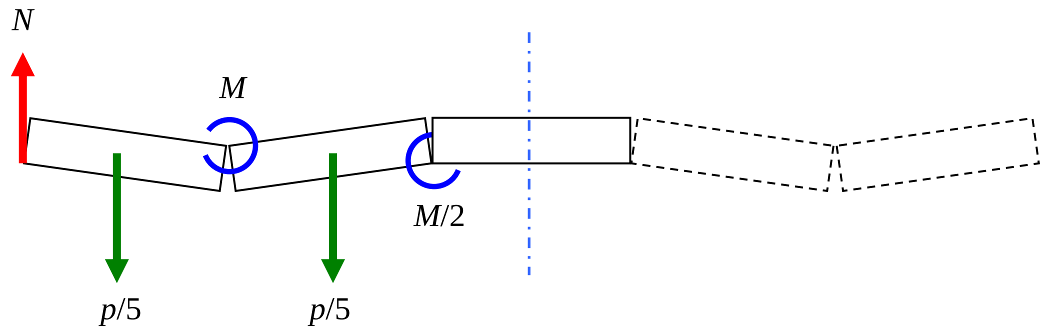
$$N \cdot 4a + M = \frac{P}{2} \cdot 2a$$

Сложив оба уравнения, получаем:

$$N = \frac{5}{24} P \approx 0,208P \qquad T = \frac{14}{24} P \approx 0,583P .$$

Дискретная модель из пяти звеньев

Модель устроена аналогично, только частей не четыре, а пять. Момент во втором от края сопряжении в два раза меньше момента в первом сопряжении, потому что там звенья образуют между собой в два раза меньший угол.



Уравнения моментов:

$$N \cdot 2a = \frac{P}{5} \cdot a + M$$

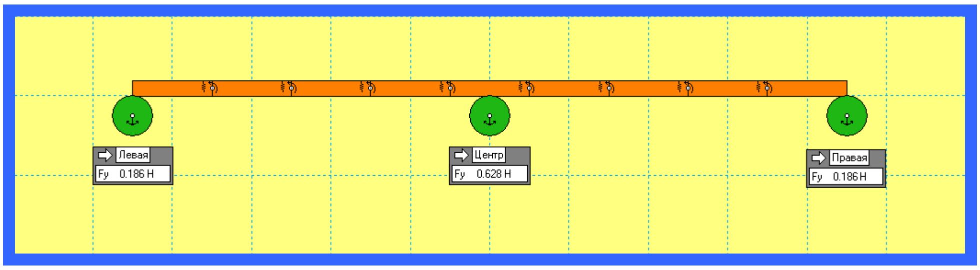
$$N \cdot 4a + \frac{M}{2} = \frac{P}{5} \cdot 4a$$

Отсюда получаем:

$$N = \frac{9}{50} P = 0{,}18P \qquad T = \frac{32}{50} P = 0{,}64P .$$

Модель в «Живой физике»

«Живая физика» позволяет моделировать только движение и взаимодействие абсолютно твёрдых тел со связями. Однако мы можем собрать упругую балку из кусочков, соединённых крутильными пружинами (желательно — с демпфированием).

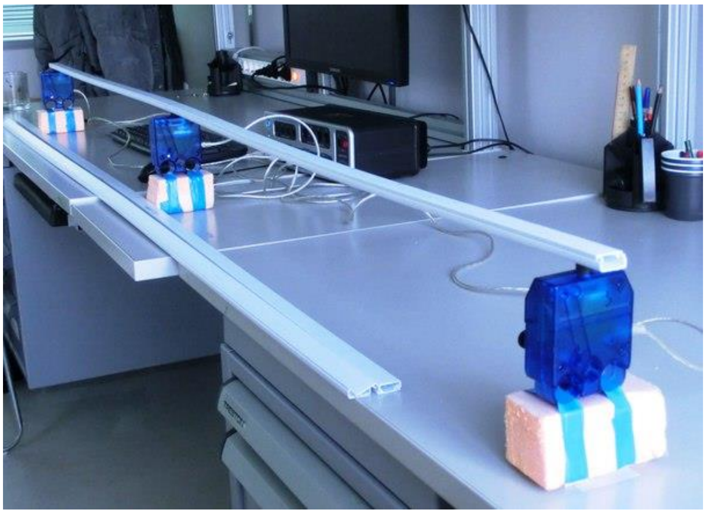


Модель балки, составленная из девяти частей, даёт распределение нагрузки по опорам в пропорции

$$N = 0{,}186P \qquad T = 0{,}628P .$$

Реальный эксперимент

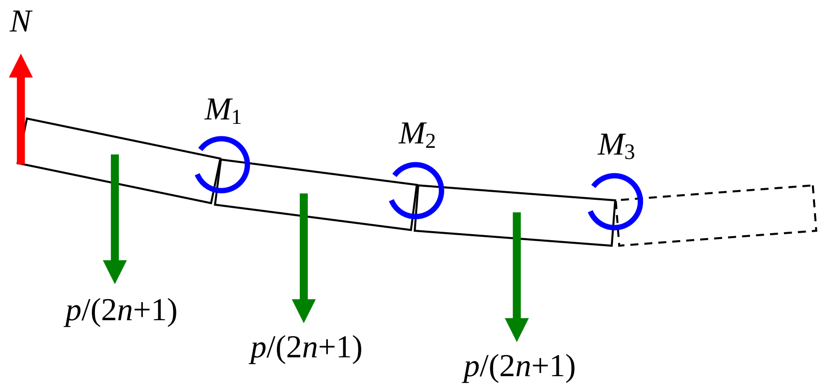
Сложности эксперимента: надо выставить верхушки датчиков на одной прямой линии; балка должна быть достаточно гибкой, но при этом не иметь заметных исходных отклонений от прямой.



Результаты, полученные в этом эксперименте:

$$N = 0{,}19 \pm 0{,}01P \qquad T = 0{,}62 \pm 0{,}02P .$$

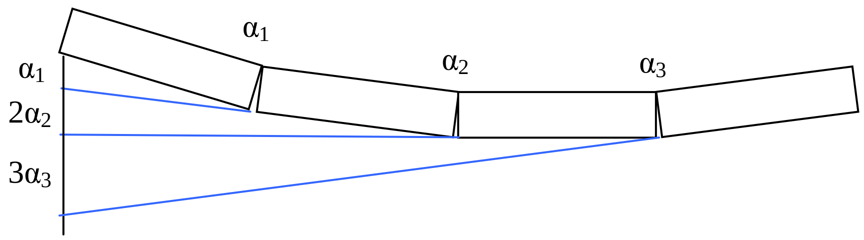
Переход к пределу в дискретной модели



Уравнения моментов:

$$\begin{cases} M_1 = 2N\cdot a - \dfrac{P}{2n+1}\cdot a \\ M_2 = 2N\cdot 2a - \dfrac{P}{2n+1}\cdot 4a \\ M_3 = 2N\cdot 3a - \dfrac{P}{2n+1}\cdot 9a \\ \ldots \\ M_n = 2N\cdot na - \dfrac{P}{2n+1}\cdot n^2 a \end{cases}$$

Неизвестных на одно больше, чем уравнений. Нужно ещё одно уравнение, связывающее моменты. Углы между соседними брусками пропорциональны моментам в сопряжении этих брусков. Вклад каждого сопряжения в отклонение левого конца балки от горизонтали пропорционален расстоянию от сопряжения до левого конца. А суммарное отклонение должно быть равно нулю, потому что все опоры находятся на одном уровне.



Отсюда имеем ещё одно уравнение

$$M_1 + 2M_2 + 3M_3 + \ldots nM_n = 0.$$

Подставляя сюда уравнения моментов, получаем

$$N = P\cdot\frac{\sum_1^n k^3}{2(2n+1)\cdot\sum_1^n k^2}$$

Переходим к пределу $n \to \infty$, это единственное место, где мы применяем математический анализ в его самой зачаточной форме:

$$N = P \cdot \frac{\left(n^4 / 4\right)}{4n \cdot \left(n^3 / 3\right)} = \frac{3}{16} P .$$